# Localización espacial de servicios conflictivos

Miguel Puente Ajovin

August 6, 2011

## 1 Introducción

Supongo que ejemplos y modelos como este, basados en la teoría de la localización, los habrá a patadas. Muy posiblemente, de hecho, el caso que voy a exponer será de conocimiento básico entre los estudiosos del tema, pero como mi única pretensión es la de dar a conocer curiosidades económicas, es algo que no se me presenta como problemático.
Lo que vamos a establecer es cual es la localización óptima de un servicio que genere un bienestar cuyo valor dependa del espacio y, además, de forma no lineal. Hablamos de servicios que la gente prefiere cuanto más cerca mejor, sin llegar a estar en la misma posición en la que están los demandantes. Paradas de autobús, el rastro, o las fiestas pueden ser tres ejemplos básicos de a lo que me refiero.
La respuesta puede ser obvia, y lo es, pero el hecho de poder matematizarla correctamente nos puede dar una base de estudio para, más adelante, presentar otras variantes. De este modo, el resultado básico es que, si la población está uniformemente distribuida, y disponemos una ciudad lineal, la localización se dispondrá en el centro, mientras que si el centro de la ciudad está mucho más habitado, se dispondrá del servicio en barrios adyacentes.
Lo que presente es, pues, un modelo sencillo de representación económica que espero se entienda fácilmente.

## 2 Ciudad lineal

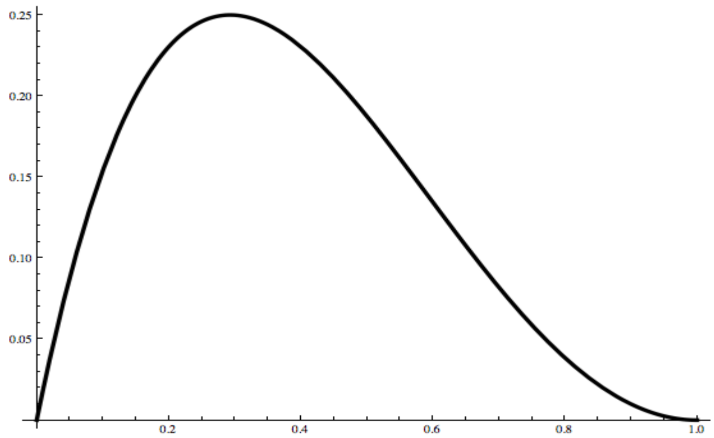
Los modelos básico de localización comienzan siendo presentados como una ciudad lineal. Para pensar en estos términos podemos pensar en la típica calle del oeste americano en la que se encontraba, a ambos lados, la ciudad. Es una forma de simplificar la realidad de las ciudades, denotando la existencia de extremos y un centro. Para que el modelo sencillo, esta ciudad tiene un tamaño normalizado igual a 1 kilómetro. Y vamos a suponer, en una primera instancia, que la población está uniformemente distribuida a lo largo de toda la ciudad, lo que quiere decir que hay el mismo número de personas en el extremos izquierdo que en el derecho o que en el centro.

## 3 Utilidad de los habitantes

La gracia de este pequeño modelo parte del hecho de que la utilidad de los individuos no es lineal. De esta forma, si el servicio se localizara in situ, la persona no obtendría ninguna utilidad, con forma se aleja un poco va ganando mucha utilidad rápidamente hasta que llega un punto en el que la utilidad va bajando. La mejor forma de representar la utilidad basada en la distancia a la que se encuentra el servicio es mediante la siguiente formula

$$(1-x)^2\left(1-(1-x)^2\right) \tag{1}$$

De la cual, el gráfico resultante es:




Dónde el óptimo para cada habitante es que el servicio se encuentre a una distancia de 0,293 kilómetros, relativamente cerca, pero no justo al lado.

## 4 Óptimo uniforme

El objetivo es por tanto seleccionar la localización del servicio intentando maximizar la utilidad de todos los individuos. Y puesto que estos están distribuidos uniformemente, podemos normalizar la población al continuo, de forma que habrá una persona en cada uno de los puntos de la línea. Denominamos $i$ a cada uno de los individuos y x a la localización finalmente escogida. La distancia de un individuo cualquiera "i" hasta el servicio x será, por tanto: $|x-i|$. Utilizamos el valor absoluta porque el individuo puede estar tanto a la izquierda como a la derecha del servicio, y la distancia siempre será positiva. La utilidad de este individuo "i" será, por tanto, de:

$$(1-|x-i|)^2\left(1-(1-|x-i|)^2\right) \tag{2}$$

Lo que queremos es maximizar es la suma de las utilidades de todos los individuos, intentando maximizar el bienestar colectivo o conjunto. Por ello, debemos buscar cual es la posición (x) que alcanza un mayor valor del sumatorio de todas las utilidades individuales. Dicho sumatorio es:

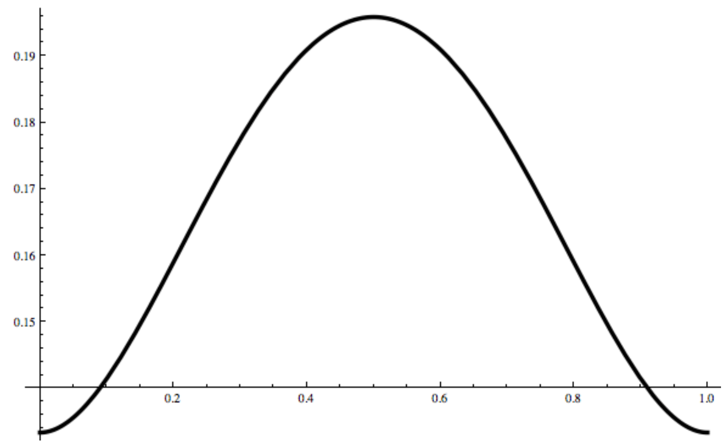
$$\int_0^1 (1-|x-i|)^2\left(1-(1-|x-i|)^2\right) \tag{3}$$

Que integrando sale:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{2}{15} \tag{4}$$

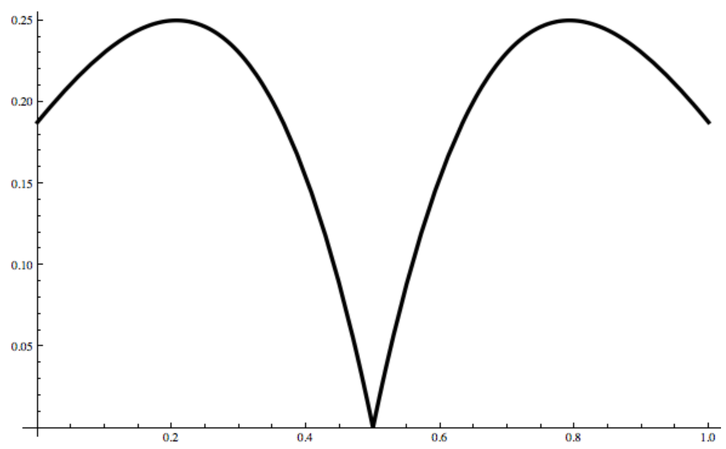
Esto nos da el valor de la utilidad conjunta en función de la posición en donde coloquemos el servicio, “x”.

Como podemos ver en el gráfico:




El máximo lo alcanza en el centro, y los mínimos en los extremos. Esto significa que si localizamos el servicio en el centro estaremos maximizando el bienestar colectivo. Podemos verlo matemáticamente derivando con respecto a x e igualando a cero para obtener sus raices, obteniendo $2x - 6x^2 + 4x^3 = 0$ lo cual nos dará los máximos (0,5) y mínimos (0 y 1).

¿Por qué?
Puesto que la población está distribuida de forma uniforme y la gente prefiere la relativa cercanía, aun a pesar de que los que se posicionen en el centro no obtengan ninguna utilidad, con forme nos movemos a ambos lados los aumentos son máximos. Podemos ver en el siguiente gráfico la utilidad que obtiene cada individuo.



Si moviéramos el servicio hacia alguno de los lados, y puesto que en los extremos es decreciente, estaríamos perdiendo más utilidad de que la estaríamos ganando.

El resultado es el mismo que obtenemos si la utilidad fuera lineal en todo el recorrido, por el hecho de haber incluido homogeneidad en la distribución de los individuos.

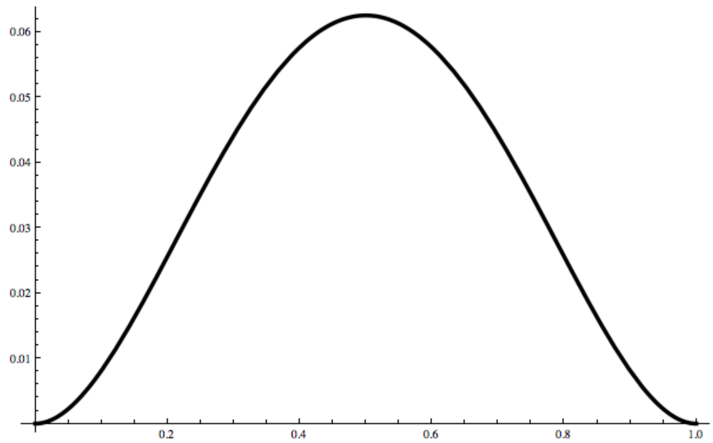
En el siguiente apartado utilizaremos una hipótesis más realista, por la cual el centro este más habitado.

# 5 Óptimo no uniforme

En este caso vamos a emplear el hecho de que el centro está más poblado que las afueras. Para ello ponderaremos cada utilidad multiplicándola por la cantidad de personas que hay en cada localización. Primer tenemos que definir cual es la distribución de la población sobre la ciudad. En este caso voy a emplear una una versión de la función logística con aun más aglomeración, es decir, cuadrática:

$$x^2(1-x)^2 \tag{5}$$

Cuyo gráfico es:



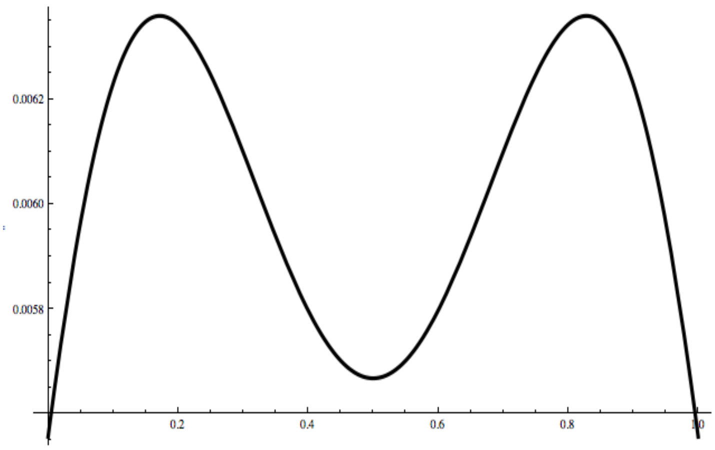

De esta forma, mientras la utilidad de cada individuo sigue siendo la misma, la utilidad del conjunto de individuos de cada una de las localizaciones será:

$$(1-|x-i|)^2\left(1-(1-|x-i|)^2\right)i^2(1-i)^2 \tag{6}$$

De esta forma, el sumatorio da un valor de:

$$\frac{36x^8-144x^7+336x^6-504x^5+378x^4-84x^3-30x^2+12x+7}{1260} \tag{7}$$

De nuevo, esta ecuación nos da el valor de la utilidad agregada para cada posición "x". Gráficamente:



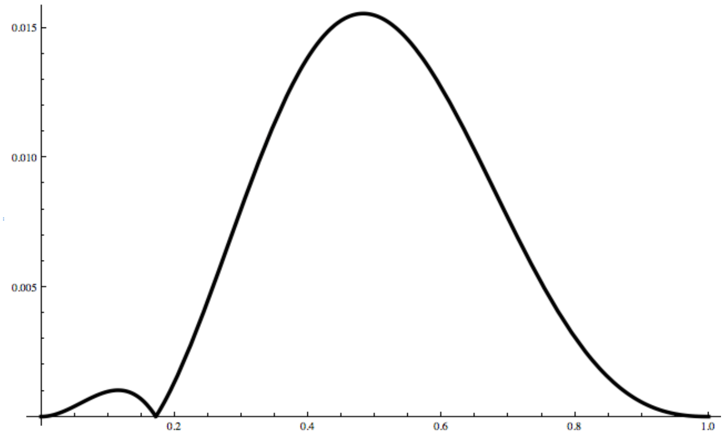

Derivando obtenemos:

$$\frac{288x^7 - 1008x^6 + 2016x^5 - 2520x^4 + 1512x^3 - 252x^2 - 60x + 12}{1260} \tag{8}$$

Cuyas raíces unitarias nos da las localizaciones que hacen máxima la utilidad conjunta (0,172 y 0,828) y mínima (extremos y centro, este es mínimo local). De esta forma vemos como ahora la localización óptima no es el centro, como en el caso anterior, sino una localización adyacente en alguno de los laterales (indiferente cual), sin llegar a un extremo.

Esta diferencia puede explicar una tontería tal como que en los pueblos (población más uniformemente distribuida), las fiestas son en la plaza del pueblo/centro, y en las ciudades, donde el centro está más masivamente ocupado se desvían las fiestas a localizaciones cercanas a las afueras (pero no fuera de la ciudad).

Podemos ver mediante estos dos gráficos la utilidad de cada individuo en cada localización y del agregado de cada localización respectivamente, suponiendo que se elige la localización de la izquierda:




De esta forma vemos como los del centro, que son mayoría, estan mucho más contentos que antes porque el servicio no está muy lejos, y no les afecta directamente los pocos efectos negativos limitados a los pobres que se encuentren en la posición 0,172...

# 6 Óptimo general

En el caso anterior hemos supuesto una aglomeración de la población en el centro. Esta hipótesis ha determinado la posición de la localización óptima. Si recordáis, a la hora de hacer la aglomeración he elegido la forma cuadrática, pero podría haber elegido cualquier otra, y el resultado podría haber cambiado. Contra menos aglomeración y mayor homogeneización de la distribución, más fuerte será la tendencia a dejar la localización en el centro.

Para ver como cambia la localización del optimo en base a la aglomeración de la población en el centro he realizado el caso general. En este caso, en vez de normalizar por la función logística cuadrática, he empleado la función de distribución normal. Esta formula se puede manipular facilmente, localizando la media en el centro (0,5) se puede manipular la varianza para que esté más o menos agregada la población. La función de distribución normal es la siguiente:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-0.5}{\sigma})^2} \tag{9}$$

De esta forma, al hacer la integral (sumatorio), se deja en función de la varianza, pudiendo finalmente hacer un manipulate en Mathematica que nos permite ver como cambia la máxima utilidad en cada posición con cada valor de la varianza, es decir, con cada tipo de aglomeración.

Para ver mejor cuales son los puntos que maximizan la utilidad conjunta se puede hacer la derivada y, de nuevo un manipulate.

Además de poderse bajar los dos archivos de mathematica dispongo en la siguiente página de unos cuantos gráficos con los que ver la evolución. (a menor varianza, mayor aglomeración en el centro).

En esta página vemos la utilidad o bienestar agregado en función de la posición del servicio. Con forme aumenta la aglomeración en el centro se tiende a los valores de 0,2 y 0,8.

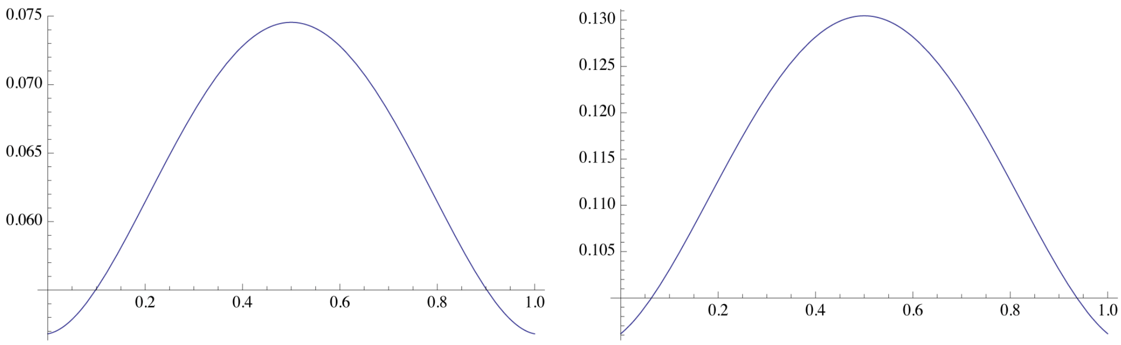



Figure 1: Valores de $\sigma$ de 1 y 0,5

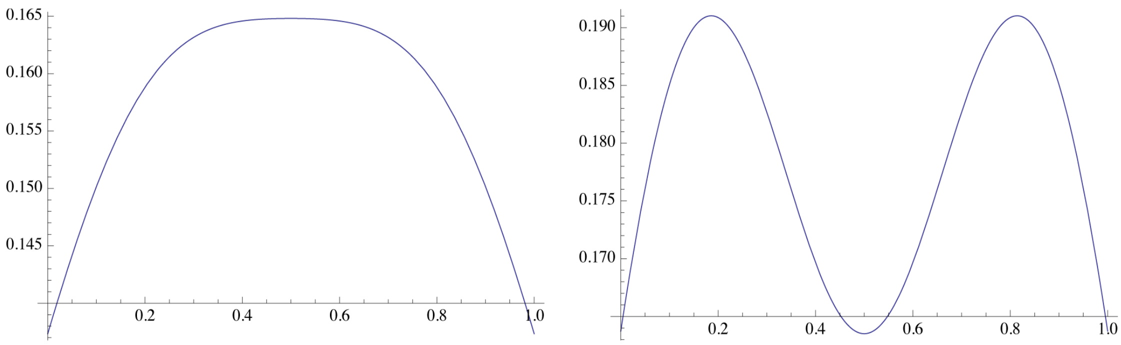



Figure 2: Valores de $\sigma$ de 0,3 y 0,2

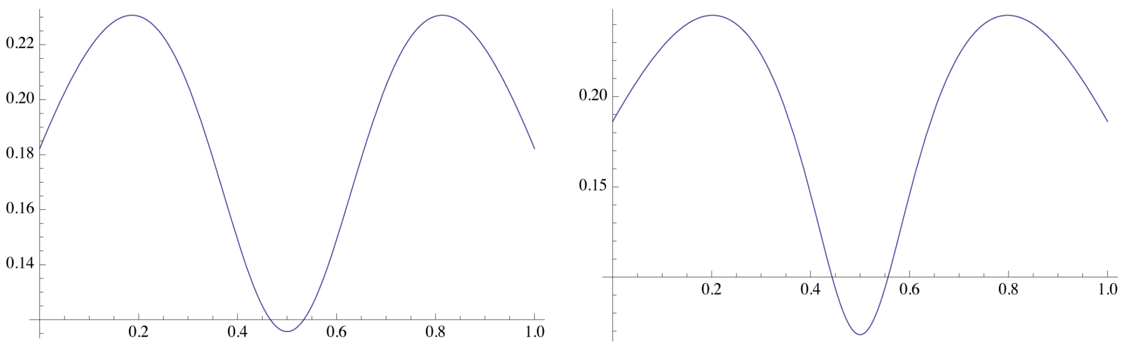



Figure 3: Valores de $\sigma$ de 0,1 y 0,05

Ahora pasamos a los gráficos de la derivada, lo cual nos puede dar una mayor aproximación de la evolución del punto óptimo, ya que será en el punto en el que la función se haga cero, suponiendo siempre que se elegirá el lado izquierdo (obviamos el derecho). Podemos ver como cuando aumenta la aglomeración el punto que hace cero la función se va hacía la derecha (el punto intermedio es un mínimo local, no un máximo). Curioso es el hecho de que incluso se pasa del 0,2 por lo que hay un momento en el que al aumentar la aglomeración se acerca al centro (muy poco). Si recordamos, la distancia óptima era de 0,293 que es casi 0,3. Si todo el mundo estuviera en el centro, (aglomeración absoluta), el punto óptimo del servicio será el 0,207.

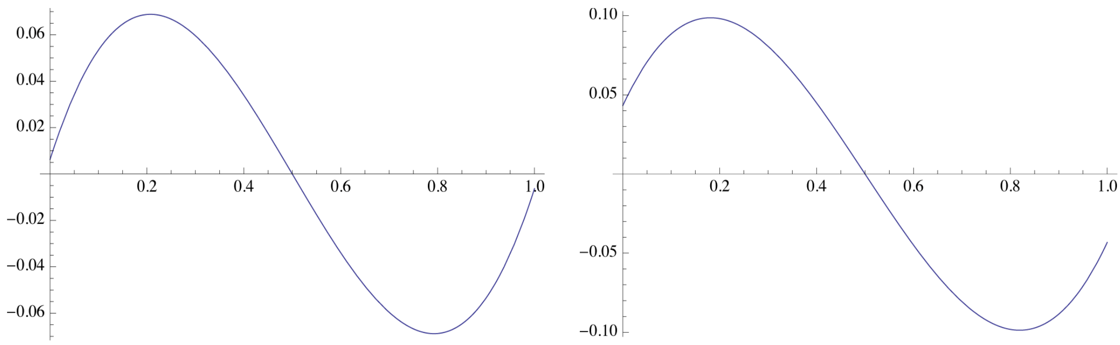



Figure 4: Valores de $\sigma$ de 1 y 0,5

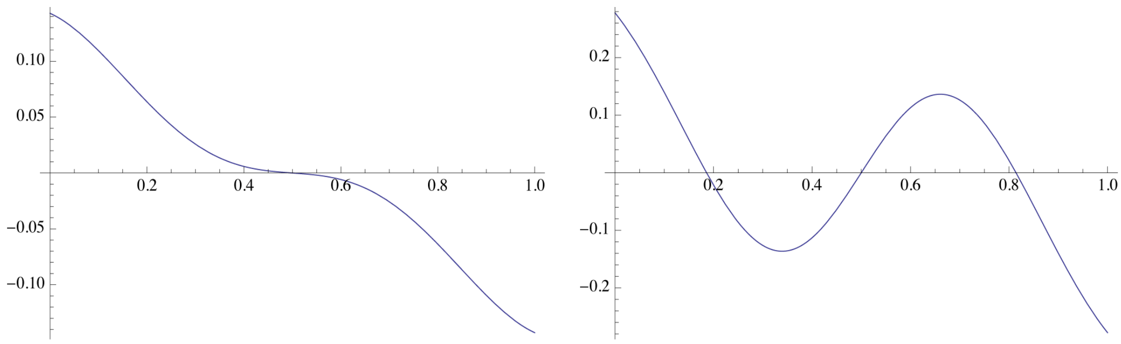



Figure 5: Valores de $\sigma$ de 0,3 y 0,2

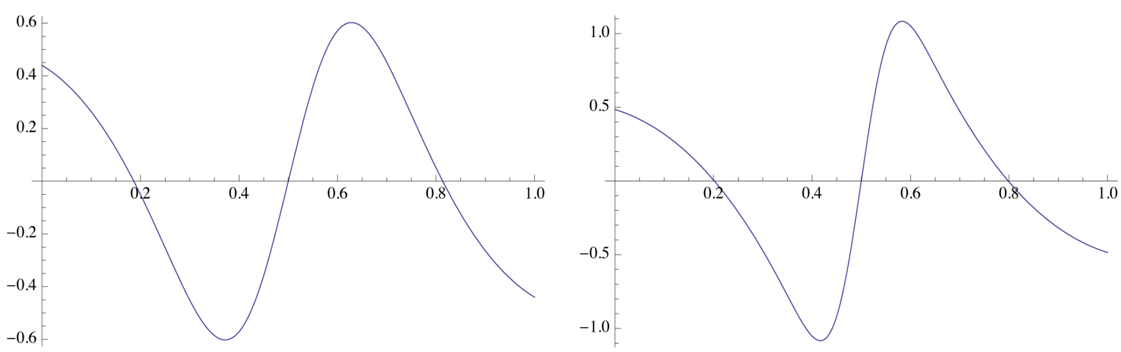



Figure 6: Valores de $\sigma$ de 0,1 y 0,05

# 7 Conclusiones

Aunque el modelo pueda parecer sencillo, y lo es, podemos extrapolar algunas de sus conclusiones a la colocación optima de servicios. En primer lugar tenemos que destacar que no estamos hablando en ningún momento de mercado o competencia por lo que deberíamos asociarlo más a decisiones de un planificador / sector público. O incluso un monopolista, siempre que discriminara precios de forma perfecta y cobrara según la utilidad percibida.

La hipótesis de aglomeración de habitantes en el centro se puede extrapolar al nivel de uso en el centro, y aun saldría más aglomeración.

Como ya decía en la introducción, las conclusiones generales a las que llegamos son de todo menos extrañas. Servicios conflictivos, que generen utilidad cuanto más cerca estén, con problemas y desutilidades crecientes a partir de un rango de cercanía (0,293), tenderán a alejarse de las zonas pobladas el mínimo posible.

Esto sí que es destacable. Puesto que el resultado no arrojaba una posición extremista. Es decir, el servicio conflictivo no se situaba allá donde se localizara menos gente, lo que habría sido, desde un punto de vista social (en búsqueda de la igualdad) mejor. Para ello deberíamos haber empleado otros criterios.

Otro resultado se puede sacar del bienestar. Este aumenta siempre que aumente la aglomeración. Al principio, mientras se mantiene la localización en el centro, al irse acercando gente de los extremos al centro (ya que aglomeración no consiste en el único aumento de gente en el mismo centro, si no en el cercanía al centro), aumenta la utilidad de estos. Cuando están la aglomeración empieza a ser muy grande, están tan cerca del centro que la utilidad comienza a bajar, pero en ese caso deciden cambiar de sitio la localización y con el cambio sigue aumentando la utilidad. De hecho el máximo se consigue cuando todos están en la misma localización (centro exacto) y el bien se localiza a 0,297 kilómetros. Máxima aglomeración.

La conflictividad de la que hablo, generada solo en distancias cortas, podemos asociarla a ruidos, olores, aglomeración de tráfico, malos ambientes... todo efectos que surgen espontáneamente a partir de diversos servicios ubicados por la ciudad.

Por último, destacar que este simple modelo puede albergar más aproximaciones que mejoren los resultados. Ciudad circular en vez de lineal, distribución más variada, competencia o multiservicios.

Para acabar, remarcar que este pequeño análisis ha sido realizado para el blog http://caoticaeconomia.wordpress.com como simple curiosidad, derivada de una aburrida tarde de viernes. Un saludo.